Escalerende garantietoezeggingen: Een alternatief voor het StAr RAM-contract? Technische uitwerking*

Servaas van Bilsen†, Roger J. A. Laeven‡ en Theo E. Nijman§

April 7, 2013

Abstract

Dit document bevat de technische uitwerking van (i) het EG contract, (ii) het flexibele (reële) contract en (iii) het contract met een rendementsgarantie. Deze contracten zijn geanalyseerd in:

Bilsen, S. van, R.J.A. Laeven en T.E. Nijman (2013). "Escalerende garantietoezeggingen: Een alternatief voor het StAr RAM-contract?", mimeo.

1 Notatie

We gebruiken in de technische uitwerking van de pensioencontracten de volgende notatie:

Table 1: Parameters

Parameter	Omschrijving
μ	verwacht (rekenkundig) rendement op het zacht pensioenvermogen
C	pensioenpremie als percentage van het genoten loon
T	overlijdensleeftijd deelnemer
P	pensioneringsleeftijd deelnemer
E	toetredingsleeftijd deelnemer
i	geboortejaar deelnemer
R_G	rendementsgarantie

Deze tabel toont de omschrijving van de parameters.

*Wij zijn Lans Bovenberg erkentelijk voor discussies over de vormgeving van pensioenuitkeringen. *Matlab* computercode om de technische uitwerking te implementeren is op verzoek verkrijgbaar bij de auteurs. Dit onderzoek is gedeeltelijk gefinancierd door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

†Tilburg University, CentER en Netspar, e-mail: S.vanBilsen@uvt.nl.

‡University of Amsterdam, ACIS, CentER, Eurandom en Netspar, e-mail: R.J.A.Laeven@uva.nl.

§Tilburg University, CentER en Netspar, e-mail: Nyman@uvt.nl.

Table 2: Variabelen

Variabele	Omschrijving
R_t^n	$n$jaarsrente gezien vanaf begin tijdstip t
R_t	rendement op het hard pensioenvermogen tussen tijdstip t en $t+1$
r_t	rendement op het zacht pensioenvermogen tussen tijdstip t en $t+1$
$F_{t,s}^n$	verwachte $n$jaarsrente aan het einde van tijdstip s gezien vanaf begin tijdstip t
W_t^{H*}	hard pensioenvermogen aan het einde van tijdstip t voor indexatie
W_t^H	hard pensioenvermogen aan het einde van tijdstip t na indexatie
W_t^{Z*}	zacht pensioenvermogen aan het einde van tijdstip t voor indexatie
W_t^Z	zacht pensioenvermogen aan het einde van tijdstip t na indexatie
W_t	totaal pensioenvermogen aan het einde van tijdstip t
ρ_v	verwacht reëel rendement op het totaal pensioenvermogen tussen tijdstip t en $t+1$
ω_t	deel van het totaal pensioenvermogen dat in zakelijke (risicodragende) waarden wordt belegd tussen tijdstip t en $t+1$
I_t	genoten loon aan het begin van tijdstip t
y_t	hoogte van de nieuw op te bouwen nominale garantie aan het begin van tijdstip t
Y_t^*	hoogte van het totaal opgebouwd pensioeninkomen aan het einde van tijdstip t voor indexatie
Y_t	hoogte van het totaal opgebouwd pensioeninkomen aan het einde van tijdstip t na indexatie
$Y_{t,s}$	verwachte vervangingsratio begin tijdstip s gezien vanaf einde tijdstip t
$\pi_{t,s}$	verwachte inflatie tussen tijdstip s en $s+1$ gezien vanaf begin tijdstip t
π_t	gerealiseerde inflatie aan het einde van tijdstip t
f_t	geïndexeerde deel van de gerealiseerde inflatie aan het einde van tijdstip t
M_t	stochastische verdisconteringsvoet aan het begin van tijdstip t

Deze tabel toont de omschrijving van de variabelen.

2 Technische uitwerking van het EG contract

De volgorde in elke periode is als volgt:

1. Premie wordt betaald en pensioenuitkering wordt ontvangen aan het begin van periode t.
2. Rendement op het zacht (hard) pensioenvermogen wordt aan het einde van periode t bijgeschreven op het zacht (hard) pensioenvermogen dat beschikbaar is aan het begin van periode t.
3. Indexatie en overheveling van zacht naar hard pensioenvermogen vindt direct daarna aan het einde van periode t plaats; vervolgens worden de pensioenvermogens overgedragen naar de volgende periode en wordt verder (terug) gegaan naar stap 1 hierboven.

De volgende vergelijkingen gelden voor de ontwikkeling van de pensioenvermogens:[1]

$$W_t^{H*} = \begin{cases} (W_{t-1}^H + \alpha_t C I_t)(1+R_t) & \text{voor } t = E+i, ..., P+i-1; \\ (W_{t-1}^H - Y_{t-1})(1+R_t) & \text{voor } t = P+i, ..., T+i; \end{cases}$$

$$W_t^{Z*} = \begin{cases} (W_{t-1}^Z + (1-\alpha_t) C I_t)(1+r_t) & \text{voor } t = E+i, ..., P+i-1; \\ W_{t-1}^Z (1+r_t) & \text{voor } t = P+i, ..., T+i. \end{cases}$$

[1] We hebben de volgende initiële waarden: $W_{E+i-1}^H = W_{E+i-1}^{H*} = 0$ en $W_{E+i-1}^Z = W_{E+i-1}^{Z*} = 0$.

In bovenstaande vergelijkingen is α_t het deel van de premie dat wordt toegevoegd aan het hard pensioenvermogen. α_t wordt zodanig bepaald dat de *nieuw* op te bouwen nominale garantie, y_t, in verwachting meegroeit met de verwachte ontwikkeling van de lonen of de prijzen; zie de verdere uitleg hieronder.

De expliciete uitdrukkingen voor W_{t-1}^H en W_t^{H*} zijn resp.:

$$W_{t-1}^H = \sum_{n=\max(P+i-t,0)}^{T+i-t} \frac{Y_{t-1}}{(1+R_t^n)^n} \qquad \text{voor } t = E+i, ..., T+i;$$

$$W_t^{H*} = \sum_{n=\max(P+i-t-1,0)}^{T+i-t-1} \frac{Y_t^*}{\left(1+R_{t+1}^n\right)^n} \qquad \text{voor } t = E+i, ..., T+i.$$

Het hard pensioenvermogen is dus gelijk aan de verdisconteerde waarde van de toekomstige gegarandeerde pensioenuitbetalingen. Het rendement op het hard pensioenvermogen, R_t, wordt gegeven door:

$$R_t = \begin{cases} \frac{W_t^{H*} - (W_{t-1}^H + \alpha_t CI_t)}{(W_{t-1}^H + \alpha_t CI_t)} & \text{voor } t = E+i, ..., P+i-1; \\ \frac{W_t^{H*} - (W_{t-1}^H - Y_{t-1})}{(W_{t-1}^H - Y_{t-1})} & \text{voor } t = P+i, ..., T+i. \end{cases}$$

De premie-inleg, CI_t, is per constructie gelijk aan het vermogen dat nodig is om de nieuw op te bouwen nominale garantie, y_t, te allen tijde waar te kunnen maken plus het vermogen dat nodig is om de beoogde indexatie van y_t na te streven. De hoogte van de nieuw op te bouwen nominale garantie, y_t, wordt elk jaar zodanig vastgesteld dat deze garantie in verwachting meegroeit met de verwachte ontwikkeling van de lonen of de prijzen. De beoogde nominale garantie aan het begin van tijdstip s als gevolg van (behorend bij) de premie-inleg aan het begin van tijdstip t wordt gegeven door ($s > t$):

$$y_t \prod_{v=t}^{s-1} (1+\pi_{t,v}) = y_t \left[1 + \sum_{v=t}^{s-1} \pi_{t,v} \prod_{u=t}^{v-1} (1+\pi_{t,u}) \right].$$

De eerste term aan de rechterkant van deze gelijkheid is de nieuw op te bouwen nominale garantie y_t. De beoogde ophoging van de nieuw op te bouwen nominale garantie y_t aan het einde van tijdstip v, $v \in \{t, ..., s-1\}$, is $y_t \pi_{t,v} \prod_{u=t}^{v-1} (1+\pi_{t,u})$. In verwachting wordt aan het einde van elk tijdstip $v < s$ een bedrag ter waarde van $y_t \frac{\pi_{t,v} \prod_{u=t}^{v-1} (1+\pi_{t,u})}{\left(1+F_{t,v}^{s-(v+1)}\right)^{s-(v+1)}}$ overgeheveld van zacht naar hard pensioenvermogen. Het vermogen dat nodig is om de beoogde indexatie aan het einde van tijdstip v na te streven is nu gelijk aan de verwachte overheveling verdisconteerd tegen het verwacht rendement op het zacht pensioenvermogen, μ. We kunnen derhalve meer specifiek de volgende gelijkheid opstellen ($s > t$):

$$CI_t = y_t \sum_{s=P+i}^{T+i} \left[\frac{1}{\left(1+R_t^{s-t}\right)^{s-t}} + \sum_{v=t}^{s-1} \frac{\pi_{t,v} \prod_{u=t}^{v-1} (1+\pi_{t,u})}{(1+\mu)^{(v+1)-t} \left(1+F_{t,v}^{s-(v+1)}\right)^{s-(v+1)}} \right]. \tag{1}$$

Voor het deel van de premie dat wordt toegevoegd aan het hard pensioenvermogen, α_t, geldt:

$$\alpha_t CI_t = y_t \sum_{s=P+i}^{T+i} \frac{1}{\left(1+R_t^{s-t}\right)^{s-t}} \qquad \text{voor } t = E+i, ..., P+i-1.$$

Gebruikmakend van (1) vinden we nu voor $t \in \{E+i, ..., P+i-1\}$:

$$\alpha_t = \frac{H_t^N}{H_t^R}, \tag{2}$$

waarbij

$$\begin{aligned} H_t^N &= \textstyle\sum_{s=P+i}^{T+i} \frac{1}{\left(1+R_t^{s-t}\right)^{s-t}}; \\ H_t^R &= \textstyle\sum_{s=P+i}^{T+i} \left[\frac{1}{\left(1+R_t^{s-t}\right)^{s-t}} + \sum_{v=t}^{s-1} \frac{\pi_{t,v} \prod_{u=t}^{v-1}(1+\pi_{t,u})}{(1+\mu)^{(v+1)-t}\left(1+F_{t,v}^{s-(v+1)}\right)^{s-(v+1)}} \right]. \end{aligned}$$

We beschrijven nu de twee verschillende indexatiemechanismen voor het EG contract:

- Uitsmeren van financiële schokken.
- Directe verwerking van financiële schokken.

Uitsmeren van financiële schokken

Het geïndexeerde deel van de gerealiseerde inflatie, f_v, wordt voor elke $v \in \{E+i, ..., T+i-1\}$ als volgt bepaald:

$$\begin{aligned} f_v \pi_v W_v^{H*} = \sum_{t=E+i}^{\max(v,P+i-1)} & \left\{ y_t \left(\frac{\prod_{u=t}^{v}(1+r_t)}{(1+\mu)^{(v+1)-t}} \right) \left(\pi_{t,v} \prod_{u=t}^{v-1} (1+\pi_{t,u}) \right) \right. \\ & \left. \times \left[\sum_{s=\max(v+1,P+i)}^{T+i} \frac{1}{\left(1+R_{v+1}^{s-(v+1)}\right)^{s-(v+1)}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Directe verwerking van financiële schokken

In het geval van directe verwerking van financiële schokken wordt het geïndexeerde deel van de gerealiseerde inflatie, f_t, als volgt impliciet bepaald:

$$W_t^{Z*} = \sum_{s=\max(P+1,t+1)}^{T+i} \left[\frac{f_t \pi_t}{\left(1+R_t^{s-(t+1)}\right)^{s-(t+1)}} + \sum_{v=t+1}^{s-1} \frac{\pi_{t,v}(1+f_t\pi_t)\prod_{u=t+1}^{v-1}(1+\pi_{t,u})}{(1+\mu)^{(v+1)-(t+1)}\left(1+F_{t,v}^{s-(v+1)}\right)^{s-(v+1)}} \right] Y_t^*.$$

Als hieruit volgt dat $f_t < 0$, dan wordt $f_t = 0$.

De volgende vergelijking geldt voor de ontwikkeling van het opgebouwd pensioeninkomen:[2]

$$Y_t^* = \begin{cases} y_t + Y_{t-1} & \text{voor } t = E+i, ..., P+i-1; \\ Y_{t-1} & \text{voor } t = P+i, ..., T+i-1; \end{cases}$$

waarbij

$$Y_{t-1} = (1 + f_{t-1}\pi_{t-1})Y_{t-1}^*.$$

[2] We hebben de initiële waarden $Y_{E+i-1} = Y_{E+i-1}^* = 0$.

Voor de vermogensontwikkeling geldt voor elke $t \in \{E+i, ..., T+i-1\}$:

$$W_t^H = W_t^{H*}(1 + f_t \pi_t);$$

$$W_t^Z = W_t^{Z*} - f_t \pi_t W_t^{H*}.$$

We merken ten slotte op dat het zacht pensioenvermogen, W_t^Z, niet negatief kan worden. Er geldt immers:

$$W_t^Z = \sum_{s=\max(P+1,t+1)}^{T+i} \sum_{v=t+1}^{s-1} \frac{\pi_{t,v}(1 + f_t \pi_t) \prod_{u=t+1}^{v-1}(1 + \pi_{t,u})}{(1+\mu)^{(v+1)-(t+1)} \left(1 + F_{t,v}^{s-(v+1)}\right)^{s-(v+1)}} Y_t^* \geq 0.$$

3 Technische uitwerking van het flexibele reële contract

In deze sectie wordt het flexibele reële contract uitgewerkt voor een individuele deelnemer. Op elk tijdstip $t \in \{E+i, ..., T+i\}$ moet de volgende budgetrestrictie gelden:

$$W_t = Y_t F_t. \tag{4}$$

De linkerkant van (4) geeft het totaal pensioenvermogen aan het einde van tijdstip t. De pensioenverplichtingen worden daarentegen gegeven door de rechterkant van vergelijking (4). Deze pensioenverplichtingen bestaan uit twee componenten: Y_t en F_t. Y_t is het opgebouwd pensioeninkomen aan het einde van tijdstip t na indexatie en F_t is de annuïteitsfactor na indexatie. Het pensioenvermogen W_t is afhankelijk van het gerealiseerde rendement op het zacht pensioenvermogen. We vinden dus:

$$W_t \neq Y_t^* F_t^*.$$

Y_t^* is het opgebouwd pensioeninkomen aan het einde van periode t voor indexatie en F_t^* is de annuïteitsfactor voor indexatie.

Schokken in W_t kunnen op (ten minste) twee manieren in de pensioenverplichtingen worden verwerkt: aanpassing van Y_t^* en/of aanpassing van F_t^*.

<u>Directe verwerking van financiële schokken</u>

In het geval van directe verwerking van financiële schokken wordt Y_t^* jaarlijks bijgesteld. F_t wordt in dit geval gegeven door:

$$F_t = F_t^* = \sum_{s=\max(t+1,P+i)}^{T+i} \frac{1}{\prod_{v=t+1}^{s-1}(1+\rho_v)}.$$

<u>Uitsmeren van financiële schokken over N jaar (RAM).</u>

In het geval van uitsmeren van financiële schokken over N jaar wordt F_t^* aangepast om de budgetrestrictie (4) sluitend te krijgen. We definiëren F_t als volgt:

$$F_t = \sum_{s=\max(t+1,P+i)}^{T+i} \frac{\prod_{v=t+1}^{\min(t+N,s)}(1 + g_{t-1,v} + \Delta g_{t,v})}{\prod_{v=t+1}^{s-1}(1+\rho_v)},$$

waarbij $g_{t,v} = g_{t-1,v} + \Delta g_{t,v}$ is de aanpassingsfactor tussen tijdstip v en $v+1$ gezien vanaf het einde van tijdstip t, $\Delta g_{t,v} = \Delta g_t$ is onafhankelijk van v en $N \geq 1$ is de uitsmeerperiode. De verandering in de aanpassingsfactor, Δg_t, wordt dus gebruikt om de budgetrestrictie sluitend te krijgen.

De verwachte vervangingsratio, $Y_{t,s}$, aan het begin van tijdstip s (zonder rekening te houden met nieuwe pensioenopbouw) gezien vanaf het einde van tijdstip t wordt gegeven door:

$$Y_{t,s} = Y_t \prod_{v=t+1}^{\min(t+N,s)} (1 + g_{t,v}),$$

waarbij $Y_t = Y_t^*$. Hieruit volgt dat:

$$W_t = \sum_{s=\max(t+1,i+P)}^{T+i} \frac{Y_{t,s}}{\prod_{v=t+1}^{s-1}(1+\rho_v)}.$$

4 Technische uitwerking van het rendementsgarantiecontract

In deze sectie wordt het rendementsgarantiecontract uitgewerkt. De garantie G, die moet worden waargemaakt op de pensioendatum, bedraagt:

$$G = \sum_{t=E+i}^{P+i-1} CI_t (1 + R_G)^{P+i-t}.$$

De pensioenuitvoerder garandeert dus een rendement van R_G op de ingelegde pensioenpremies.

Het beschikbaar vermogen aan het einde van periode $P+i-1$ wordt gegeven door:

$$\max\left(W_{P+i-1}, G\right) = W_{P+i-1} + \max\left(0, G - W_{P+i-1}\right),$$

waarbij W_t als volgt evolueert:

$$W_t = (W_{t-1} + (1-g)CI_t)(1 + (1-\omega_t)R_t + \omega_t r_t) \qquad \text{voor } t = E+i, ..., P+i-1.$$

De deelnemer betaalt (jaarlijks) een deel van de premie, gCI_t, in ruil voor de garantie G.

De 'geen arbitrage conditie' impliceert dat de prijs van de garantie gelijk is aan de verwachte verdisconteerde uitbetaling van de garantie:

$$gC\mathbb{E}\left[\sum_{t=E+i}^{P+i-1} I_t M_t\right] = \mathbb{E}\left[M_{P+i} \max\left(0, G - W_{P+i-1}\right)\right],$$

waarbij $\mathbb{E}[\cdot]$ de verwachtingswaarde is. De garantieprijs, g, kan nu numeriek worden bepaald.